Clase 8: La Transformada de Laplace.

Peter Hummelgens

9 de enero de 2007

1. Transformada de Laplace de funciones.

Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ causal , $sop(f) \subseteq [a;\infty)$. Consideremos la integral de Laplace

$$F(x) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tz} f(t)dt, \quad z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

donde $z = \xi + i\eta$ una variable compleja. Decimos que $f(t)$ es Laplace transformable si, y sólo si, la integral converge absolutamente (es decir $e^{-tz}f(t)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ como función de t) para algún $z \in \mathbb{C}$. Sea $f(t)$ Laplace transformable con la integral absolutamente convergente para $z = z_0$ ($Re\ z_0 = \xi_0$). Como $sop(f) \subseteq [a;\infty)$ tenemos de (1)

$$F(z) = \int_a^{\infty} e^{-tz} f(t)dt, \tag{2}$$

donde converge y tenemos

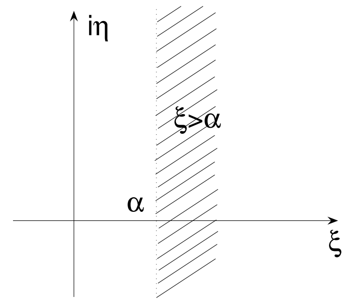
$$Re\ z = \xi \geq \xi_0 \implies |e^{-tz}f(t)| = |e^{-t(\xi+i\eta)}||f(t)| = e^{-t\xi}|f(t)| \leq e^{-t\xi_0}|f(t)|$$

con $\int_a^{\infty} e^{-t\xi_0}|f(t)|dt$ convergente, de modo que converge también $\int_a^{\infty} |e^{-tz}f(t)|dt$ para $\xi \geq \xi_0$. De lo anterior se desprende que para la integral de Laplace (1) hay 3 posibilidades:

(a) No converge para todo $z \in \mathbb{C}$ (un ejemplo es $h(t)e^{t^2}$, que crece demasiado rápido cuando $t \to \infty$), y $f(t)$ no es Laplace transformable.

(b) Converge para todo $z \in \mathbb{C}$ (un ejemplo es $h(t)e^{-t^2}$, que decrece a o sumamente rápido cuando $t \to \infty$), y $F(z)$ está definida en todo el plano $\mathbb{C}$.

(c) El caso "más común": La integral de Laplace converge absolutamente en algún semiplano $\xi = Re\, z > \alpha$,



y diverge o no converge absolutamente en $\xi < \alpha$. Podemos interpretar el caso (b) como el caso (c) con $\alpha = -\infty$ y el caso (a) como el caso (c) con $\alpha = \infty$.

En el semiplano $\xi > \alpha$, $F(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-tz} f(t)dt$ es una función analítica (Mat. VI) de z, ya que podemos calcular las derivadas de $F(z)$ por derivación bajo la integral:

$$F'(z) = \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tz} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz}(e^{-tz}) f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} (-tf(t))e^{-tz}dt,$$

es decir, cuando

$$\begin{aligned} f(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F(z), \quad \text{entonces} \\ -tf(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F'(z), \quad \text{y más generalmente} \\ (-t)^n f(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} F^{(n)}(z); \quad n = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

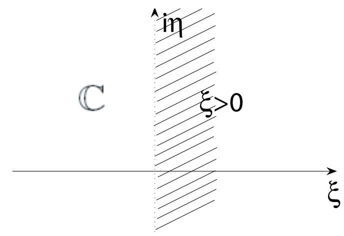
Aquí introducimos la notación $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$, para $f(t)$ Laplace transformable, cuya interpretación precisa requiere de algunos comentarios. Primero un ejemplo.

Ejemplo 1. *Sea $f(t) = h(t-a)$. Tenemos*

$$F(z) = \int_a^{\infty} e^{-tz} 1dt = -\frac{1}{z}\left[e^{-tz}\right]_{t=a}^{\infty} = \frac{e^{-az}}{z} - \frac{1}{z}\left[e^{-tz}\right]_{t\to\infty}$$

Pero $|e^{-tz}| = |e^{-t(\xi+i\eta)}| = e^{-t\xi}$ es acotada para $t \to \infty$ si, y sólo si, $\xi \geq 0$ y vemos entonces que existe $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{z}e^{-tz}$ solamente si $\xi > 0$ y en este caso el límite es cero, es decir,

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tz} f(t)dt = \frac{e^{-az}}{z} \quad \textit{en el semiplano } Re\, z > 0$$



Pero observamos que la función $\frac{e^{-az}}{z}$ *es analítica en* <u>*todo*</u> *el plano* $\mathbb{C}$ *(también en* $\xi < 0$*) excepto en* $z = 0$ *(donde tiene un polo simple). Es la función* $\frac{e^{-az}}{z}$ *definida y analítica en* <u>*todo*</u> $\mathbb{C} - \{0\}$ *que nos importa y es de importancia* <u>*secundaria*</u> *el hecho que en el semiplano* $\xi > 0$ *podemos representar* $\frac{e^{-az}}{z}$ *como la integral de Laplace* $\int_a^\infty e^{-tz} dt$*. Por la transformada de Laplace de* $h(t-a)$ *entendemos* $\frac{e^{-az}}{z}$ *en* <u>*toda*</u> *su región de analiticidad en el plano complejo. Escribimos entonces*

$$h(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{e^{-az}}{z} \quad (a \in \mathbb{R}),$$

sin agregar Re $z > 0$*. Así entonces, con* $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z)$ *indicamos que* $f(t)$ *es Laplace transformable y tiene transformada de Laplace* $F(z)$ *como función analítica en* <u>*toda su región de analiticidad*</u>*.*

Presentaremos una pequeña tabla de transformadas

$$\begin{aligned}
h(t-a) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{e^{-az}}{z} \quad (a \in \mathbb{R}), \quad h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{z} \\
h(t)e^{\lambda t} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{z-\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \\
h(t)\cos(at) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{z}{z^2+a^2}, \quad h(t)\,\mathrm{sen}(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{z^2+a^2} \quad (a \in \mathbb{R}) \\
h(t)\cosh(at) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{z}{z^2-a^2}, \quad h(t)\,\mathrm{senh}(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{a}{z^2-a^2} \quad (a \in \mathbb{R}) \\
h(t)t^n e^{\lambda} t &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{(z-\lambda)^{n+1}}, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, \quad \lambda \in \mathbb{C}).
\end{aligned} \tag{4}$$

Todas estas formulas se pueden obtener directamente de (2) via integración, pero más adelante (cuando tenemos la TL de distribuciones y las reglas operacionales de la TL) tendremos métodos muchos más eficientes para obtener estás transformadas (sin integraciones.)

2. Transformada de Laplace de distribuciones.

Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ de soporte compacto, entonces podemos escribir $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-tz} f(t)dt$ como corchete,

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(z) = \langle f(t), e^{-tz} \rangle_t, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

donde $\langle \ , \ \rangle_t$ significa que la variable en el corchete es t (y no z). El corchete existe para todo $z \in \mathbb{C}$, es decir, $F(z)$ es definida y analítica en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ (es decir una función entera). Ahora será claro que la misma fórmula (5) tiene sentido para distribuciones de soporte compacto. Así que adoptamos (5) como definición de $F(z)$ para $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ una distribución de soporte compacto. Sea $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de soporte compacto, entonces $f'_{gen}, f''_{gen}, \cdots$ también son de soporte compacto, por lo tanto

$$\begin{aligned}
f^{(n)}_{gen}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \langle f^{(n)}_{gen}(t), e^{-tz} \rangle_t &= (-1)^n \langle f(t), \frac{d^n}{dt^n}(e^{-tz}) \rangle \\
&= (-1)^n \langle f(t), (-z)^n e^{-tz} \rangle_t \\
&= (-1)^n (-z)^n \langle f(t), e^{-tz} \rangle_t \\
&= z^n \langle f(t), e^{-tz} \rangle_t \\
&= z^n F(z),
\end{aligned}$$

es decir,

$$f^{(n)}_{gen}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} z^n F(z); \quad n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{6}$$

Ejemplo 2. $\delta_a(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \langle \delta_a(t), e^{-tz} \rangle_t = e^{-az}$, *entonces*

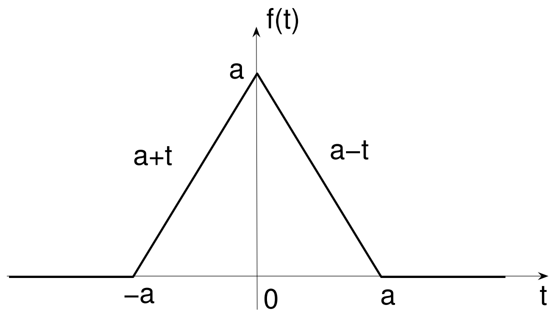
$$\begin{aligned}
\delta_a(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-az} \quad (a \in \mathbb{R}) \\
\delta(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} 1
\end{aligned} \tag{7}$$

y de (6), (7) tenemos

$$\begin{aligned}
\delta^{(n)}_a(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} z^n e^{-az} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots, \quad a \in \mathbb{R}) \\
\delta(t)^{(n)} &\xrightarrow{\mathcal{L}} z^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).
\end{aligned} \tag{8}$$

La fórmula (6) es muy útil para hallar transformadas de Laplace, como ilustra el próximo ejemplo.

Ejemplo 3. *Sea $f(t)$ con gráfica*



En un ejemplo ya visto encontramos que

$$f''_{gen}(t) = \delta_{-a}(t) - 2\delta(t) + \delta_a(t),$$

entonces con (6), (7) se sigue que

$$z^2 F(z) = e^{az} - 2 + e^{-az} \quad \Longrightarrow \quad F(z) = \frac{e^{az} - 2 + e^{-az}}{z^2},$$

¡eso es todo!. Como $f(t)$ es de soporte compacto sabemos que $F(z)$ tiene que ser analítica en todo $\mathbb{C}$, es decir, que a pesar de z^2 en el denominador de la expresión de $F(z)$ no puede haber singularidad en $z = 0$. De hecho, aplicando l'-Hopital tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0} \frac{e^{az} - 2 + e^{-az}}{z^2} &= \lim_{z\to 0} \frac{ae^{az} - ae^{-az}}{2z} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{a^2 e^{az} + a^2 e^{-az}}{2} \\ &= \frac{2a^2}{2} \\ &= a^2, \end{aligned}$$

existe.

En (5) asumimos que $f(t)$ sea de soporte compacto. Pero el corchete $\langle f(t), e^{-tz}\rangle_t$ existe por supuesto en casos más generales. Supongamos que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ <u>causal y de orden exponencial para $t \to \infty$</u>, es decir,

$$|f(t)| \leq Ae^{kt} \ \text{ para ciertas constantes } A > 0,\ k \in \mathbb{R} \text{ y para } t \text{ suficientemente grande.} \quad (9)$$

En palabras: para $t \to \infty$ $|f(t)|$ <u>no crece más rápido que exponencialmente</u>. Entonces, si $|f(t)| \leq Ae^{kt}$ para $t \geq t_0$, tenemos con $z = \xi + i\eta$,

$$\int_{t_0}^{\infty} |e^{-tz} f(t)| dt \leq \int_{t_0}^{\infty} Ae^{kt} e^{-t\xi} dt = A \int_{t_0}^{\infty} e^{-t(\xi - k)} dt,$$

que converge para $\xi > k$, lo que implica que $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-tz} f(t)dt$ converge absolutamente en el semiplano $\xi > k$, de modo que $f(t)$ es Laplace transformable. Es decir: todas las $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ causales de orden exponencial para $t \to \infty$ son Laplace transformables (una inmensa clase de funciones Laplace transformables). Para todas estas funciones la fórmula (5) sigue válida y también la fórmula (6). Cada función acotada es seguramente de orden exponencial para $t \to \infty$.

Ejemplo 4. *Sea* $f(t) = h(t)\cos(at)$, *entonces*

$$f'_{gen}(t) = -ah(t)\operatorname{sen}(at) + \delta(t)$$

$$\Longrightarrow \quad f''_{gen}(t) = -a^2 h(t)\cos(at) + \delta'(t) \quad \Longrightarrow \quad f''_{gen}(t) = -a^2 f(t) + \delta'(t)$$

$$\xrightarrow[(6),(8)]{\mathcal{L}} \quad z^2 F(z) = -a^2 F(z) + z$$

$$\Longrightarrow \quad F(z) = \frac{z}{z^2 + a^2}$$

como en la tabla (4). ¡Eso es todo!.

Ejemplo 5. *Sea* $f(t) = h(t)t^4$. *Tenemos*

$$f'_{gen}(t) = 4h(t)t^3 \quad \Longrightarrow \quad f''_{gen}(t) = 12h(t)t^2 \quad \Longrightarrow \quad f'''_{gen}(t) = 24h(t)t \quad \Longrightarrow \quad f^{(4)}(t) = 24h(t)$$

$$\Longrightarrow \quad f^{(5)}(t) = 24\delta(t) \quad \xrightarrow[(6),(7)]{\mathcal{L}} \quad z^5 F(z) = 24 \quad \Longrightarrow \quad F(z) = \frac{24}{z^5},$$

como también se ve de (4), última linea (con $\lambda = 0$, $n = 4$*).*

Alternativamente $h(t) \xrightarrow[(4)]{\mathcal{L}} \frac{1}{z}$, *(2)* $\Longrightarrow \quad t^4 h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{d^4}{dz^4}(z^{-1}) = \frac{24}{z^5}$.